

برنامه ریزی خطی

همان گونه که در فصل قبل دیدیم، در مدل بندی با بهینه سازی یک تابع هدف تحت یک مجموعه از قیود (محدودیت ها) سروکار داریم. همانطور که دیدیم تابع هدف و قیودهای مسئله به گونه ای هستند که متغیرهای تصمیم در یک گیر ضرب و با تقسیم زده اند. همچنین متغیرهای تصمیم فاقد توان هستند. به عبارت دیگر، تابع هدف و قیودهای مسئله به صورت یک معادله ی خطی هستند. به همین دلیل این مدل ها را مدل های برنامه ریزی خطی می گویند. در حالت کلی یک مسئله ی برنامه ریزی خطی به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\text{Min (max)} \quad Z = c_1 x_1 + \dots + c_j x_j + \dots + c_n x_n$$

$$\text{st:} \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n &\leq_{\geq} b_1 \\ &\vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n &\leq_{\geq} b_i \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n &\leq_{\geq} b_m \\ x_1, \dots, x_j, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

در حقیقت این مدل مسئله ای را بیان می کند که شامل m محدودیت و n فعالیت است. مقادیر سمت راست قیودها، یعنی b ها میزان موجودی منابع را نشان می دهد. عبارت دیگر b بیانگر میزان موجودی منبع نام است. c ها در مسئله min سازی نشان دهنده ی ضرایب هزینه هستند، یعنی c_1 هزینه ی ناشی از انجام یک واحد از فعالیت اول است و در حالت کلی c هزینه ی ناشی از انجام یک واحد از فعالیت i ام می باشد. دقت کنید که اگر مسئله از نوع max سازی باشد، آن گاه c ها ضرایب سود هستند. a مقدار از منبع نام است که جهت (مثبت یا منفی) یک واحد از فعالیت i ام می باشد.

دقت کنید که اگر مسئله از نوع man سازی باشد، آن گاه z ها ضرایب می شوند.
 a_i مقداری از منبع i ام است که جهت انجام یک واحد از فعالیت i ام مصرف
 می شود. مثلاً $a_{۲۳}$ بیانگر مقداری از منبع دوم است که جهت تولید یک واحد از
 فعالیت سوم مصرف می شود.
 در واقع پارامترهای z و b و a_i معلوم و متغیرهای تصمیم x ها مجهول
 می باشند.

معروضات برنامه ریزی خطی

یک مدل برنامه ریزی ریاضی در صورتی خطی است که دارای فرضیات ذیل باشد:

- الف: فرض تناسب
- ب: فرض جمع پذیری
- ج: فرض بخش پذیری
- د: فرض معین بودن

الف: تناسب

متصور از فرض تناسب این است که هر فعالیت به تنهایی مستقل از سایر فعالیت ها
 عمل می کند. به عبارت دیگر، آهنگ تغییرات نسبت رابطه، تابع ثابت است. بنابراین
 چنانکه متغیر تصمیم برابر مقداری خاص تغییر کند، مقدار تابع نیز دقیقاً به همان نسبت
 تغییر می کند. در واقع این اصل بیان می کند که اگر یک فعالیت m برابر شود میزان
 سود (یا هزینه) و همچنین میزان مصرف آن از منابع نیز m برابر می شود.
 برای مثال، اگر $a_{۱۱}=5$ و $x_1=2$ و $a_{۱۱}x_1=10$ اگر x_1 به مقدار ۵ برابر شود

باید $(x_1 = 2, 1)$ تابع نیز ۱۰,۵ می شود، که دقیقاً ۵٪ افزایش یافته است.

ب) جمع پذیری

این فرض بیانگر این واقعیت است که باید روابط ریاضی بین متغیرها در مدل تابع هدف و محدودیت ها به صورت جمع جبری بیان شود. بنابراین در مدل برنامه ریزی خطی، هیچ گاه حاصل ضرب دو متغیر دیده نمی شود. به عبارتی این اصل تضمین می کند که سود و یا هزینه کل برابر مجموع سود و یا هزینه تک تک فعالیت ها است. همچنین میزان مصرف هر منبع برابر با مجموع مصارف تمام فعالیت ها است.

برای مثال به این دو رابطه توجه کنید، رابطه ①

$$3x_1 + 5x_2 - x_1x_3 \leq 50$$

رابطه ② $2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 50$

رابطه ① رابطه ای غیر خطی است، چون در آن از حاصل ضرب x_1 و x_3 استفاده شده است. در حالی که رابطه ② رابطه ای خطی است، چون رابطه ای x_1 ، x_2 و x_3 به صورت جمع جبری بیان شده است.

ج) بخش پذیری

«در مدل برنامه ریزی خطی متغیرهای تصمیم هر مقدار دلخواهی (چه عدد صحیح - چه عدد غیر صحیح) می تواند در جواب هایی مسئله داشته باشند. بنابراین فرض بخش پذیری بدین معناست که هر داده فعالیت به هر کس دلخواهی قابل تقسیم است و در نتیجه متغیرهای تصمیم می توانند مقادیر غیر صحیح نیز داشته باشند. این خصوصیت مدل برنامه ریزی خطی بر اساس محدودیت های غیر منفی مدل $L \leq x \leq U$ (که $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$) تضمین می شود. پس بنابراین می توان به طور خلاصه گفت که: این اصل بیان می کند که مقدار متغیرهای تصمیم هر عدد نامنفی می تواند باشد و الزامی ندارد

که مقدار متغیرهای تصمیم حداکثری صحیح باشد.

ر: معین (مطمئن) بودن

این فرض بدین معناست که کلیه پارامترهای مدل عمومی برنامه ریزی خطی (a, b, c) در انواع برنامه ریزی، تعدادی ثابتی هستند. اگرچه تعیین پارامترهای مدل در بیشتر مواقع به طور قطع امکان پذیر است، در برخی موارد انواع برنامه ریزی آن قدر بلند است که تعاد بر پارامترها تعیین کنند. در چنین مواقعی می توان برای بررسی تاثیر تغییرات بر جواب بهینه مدل از فن تحلیل حساسیت استفاده کرد.

پس بدین ترتیب، این اصل بیان می کند که پارامترهای مدل قطعاً هستند و هیچ گاه به صورت احتمالی یا بازه ای نمی باشند.

اگر یکی از اصول بالا نقض شود، در آن صورت مدل را غیر خطی می گویند.

$$\begin{aligned} \max \rightarrow Z &= x_1^2 + x_2 \\ \text{st } x_1 - x_2 &= 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

اصل اول را نقض کرده
درجه غیر خطی است.

$$\min Z = -x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{st } \frac{x_1}{x_2} + x_3 = 5$$

غیر خطی است اصل چهارم

$$2x_1 - x_2 + x_3 = [3, 5] \text{ اصل اول نقض شده است.}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

فرم‌های ناشی شده‌های برنامه ریزی خطی

معوه یک شده برنامه ریزی خطی به یکی از دو فرم زیر عایش داده می‌شود:

① فرم متعاری (فرم کانونی)
② فرم استاندارد

① فرم متعاری

در یکی‌های فرم متعاری عبارت انداز و

الف) متوهای تقسیم همواره نامفی هستند.

ب) برای شده $\min$ می‌توان از نوع بزرگ‌تر یا بزرگ $(\geq)$ و برای شده $\max$

ناری از نوع کوچک‌تر یا بزرگ $(\leq)$ هستند.

ج) منابع (جی‌ها) هر عددی (حتی عدد منفی) می‌تواند باشند.

* اگر متغیر آزاد در عبارت باشد، می‌توان آن را به صورت دو متغیر منفی نوشت یعنی اگر:

$$x \text{ آزاد در عبارت} \rightarrow x = x' - x'' ; x' \geq 0, x'' \geq 0$$

$$a = b \rightarrow \begin{cases} a \leq b \rightarrow -a \geq -b \\ a \geq b \rightarrow a \geq b \end{cases} *$$

مثال: فرم کانونی شده زیر را بنویسید.

$$\min Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{st } x_1 - x_2 = 4$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min Z = 2x_1 + x_2$$

$\rightarrow$

$$x_1 - x_2 \geq 4$$

$$(x_1 - x_2 \leq 4) \rightarrow -x_1 + x_2 \geq -4$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال: مثله زیر را به صورت معادلاتی بنویسید.

$$\max Z = x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

$$\text{st} : x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 + 5x_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad x_3 \text{ آزاد در علامت}$$

در x_3 آزاد در علامت است این یعنی این متغیر هر علامتی می تواند داشته باشد.

متغیرهای تغییر دما - درم - رطوبت - ... هرکدام آزاد در علامت هستند. بعضی اوقات برای حل این
آزاد در علامت را به دو متغیر استفاده می کنند.

$$x_3 = x'_3 - x''_3 \quad x'_3, x''_3 \geq 0$$

$$\max Z = x_1 + 5x_2 + 2(x'_3 - x''_3)$$

$$\text{st} \quad x_1 + x_2 + (x'_3 - x''_3) \leq 10$$

$$2x_1 + 5(x'_3 - x''_3) \leq 15$$

$$x_1, x_2, x'_3, x''_3 \geq 0$$

دارم :-

$$\max Z = x_1 + 5x_2 + 2x'_3 - 2x''_3$$

$$\text{st} \quad x_1 + x_2 + x'_3 - x''_3 \leq 10$$

$$2x_1 + 5x'_3 - 5x''_3 \leq 15$$

$$x_1, x_2, x'_3, x''_3 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

مثال دفر کانونی شدی دیل ایسید

$$\begin{cases} \textcircled{1} & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ \textcircled{2} & 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ & |2x_1 + 2x_2| \leq 10 \end{cases}$$

④ آزاد در علامت $x_1, x_2 \geq 0, x_3$

$$\textcircled{1} \quad 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 2 \xrightarrow{\times(-1)} -2x_1 - 5x_2 - 2x_3 \leq -2$$

$$\textcircled{2} \quad 2x_1 + 3x_2 = 2 \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \leq -2 \\ -2x_1 - 3x_2 \geq -2 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad |2x_1 + 2x_2| \leq 10 \rightarrow -10 \leq 2x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq -10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 \leq -10 \\ -2x_1 - 2x_2 \geq -10 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{آزاد در علامت } x_3 \rightarrow x_3 = x'_3 - x''_3 \rightarrow x'_3, x''_3 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\text{Min } Z = x_1 + 2x_2 + 3(x'_3 - x''_3)$$

$$\text{st } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - (x'_3 - x''_3) \leq 4 \\ -2x_1 - 5x_2 - 2(x'_3 - x''_3) \leq -2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 2 \\ -2x_1 - 3x_2 \leq -2 \\ 2x_1 + 2(x'_3 - x''_3) \leq 10 \\ -2x_1 - 2(x'_3 - x''_3) \leq -10 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x'_3, x''_3 \geq 0$$

این فرم

نظم استاندارد
ویژگی های نظم استاندارد برنامه ریزی خطی عبارت اند از:

الف، تمامی محدودیت ها (معادله ها) به صورت مساوی هستند. (به جز نامفروضات)

ب، عضو سمت راست هر معادله (یعنی موجودی منابع، نقاط) نامنفی باشد.

ج، تمام متغیرهای تصمیم نامنفی هستند.

د، تابع هدف به صورت Max یا Min می باشد.

بنابراین اگر محدودیت های مدل به فرم مساوی باشند با اضافه و کم کردن متغیرهای کمبود (Slack) و مازاد (Surplus)، محدودیت ها را به صورت مساوی تبدیل می کنیم.

به طور مثال محدودیت $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b$ با اضافه کردن متغیر کمبود s_1 تبدیل

به محدودیت $b = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + s_1$ می شود.

و محدودیت $a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 \geq b'$ با کم کردن متغیر مازاد s'_1 تبدیل به

محدودیت $a'_1x_1 + a'_2x_2 + a'_3x_3 - s'_1 = b'$ می شود.

نظم استاندارد نقش بسیار مهمی را در حل مسئله برنامه ریزی خطی، بازی می کند. به عنوان

مثال مسئله برنامه ریزی خطی ذیل را که در آن کلیه محدودیت ها به صورت

$$Max \ Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

هستند را در نظر می گیریم. $st \ \sum a_{ij} x_j \leq b_i, (b_i \geq 0); i=1, \dots, n$

$$x_j \geq 0; j=1, 2, \dots, n$$

فرم استاندارد فوق به صورت زیر است -

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{st } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + S_i = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$S_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

مشاهده می شود که فرم استاندارد، محدودیت های مکملی بر پایه برخی خطی را تبدیل به m معادله با

$m+n$ مجهول می نماید. جوابی از این دستگاه معادلات مورد نظر است که در آن x_j ها

($j=1, \dots, n$) و S_i ها ($i=1, 2, \dots, m$) معادله نامفوق را اختیار نماید. و در این حالت

گوئیم، جواب شدنی است.

نیده ای که در بالا ذکر شد، ایده ای بسیار ساده است، اما مشکل در این است که m معادله

و $m+n$ مجهول داریم و در نتیجه در حالت کلی بی نهایت جواب خواهیم داشت. در نتیجه از نقطه

نظر عقلی در محاسبات معقول نیست که کلیه جواب های شدنی را محاسبه کنیم. روشی مورد

نظر است که بعد از محاسبه تعداد متغیر از جواب ها، به جواب بکشیه برسند.

گویی از این روش ها، در فرم استاندارد روش سیمپلکس می باشد که در ادامه فصل بررسی

خواهیم نمود.

حل مساله برنامه ریزی خطی

مادر این فصل روش برای حل مسائل برنامه ریزی خطی معرفی می کنیم و هر یک را به طور مفصل بررسی می کنیم.

قبل از آن که بخواهیم این روش را بررسی کنیم، لازم است برخی مفاهیم و تعاریف معرفی شوند.

مساله زیر را در نظر بگیرید.

$$\min(\max) Z = c_1x_1 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$$

$$\text{st } a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_1$$

!

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_i$$

!

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n \geq 0$$

جواب (Solution)

هر بردار به فرم $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$ یک جواب برای مساله بالا می گوئیم. هرگاه

$\bar{x}$ در همدی قیود مساله بالا به جز محدودیت های علائقی صرف نکند.

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{st } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال: به مساله زیر توجه کنید

در همدی محدودیت ها به جز محدودیت های علائقی صرف نکند.

$$\checkmark \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1+1 \leq 8 \\ -1+2 \leq 4 \end{matrix}$$

$$\checkmark w = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

فضای جواب (یا محدثه) یا منطقه موجهه
اشتراک مجموعه جواب تمامی محدودیت‌های مدل را فضای جواب می‌نامیم.

جواب شدنی یا موجهه
هر نقطه از فضای جواب (یا محدثه) را جواب شدنی می‌نامیم. فرض کنید
$$\bar{X} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}$$
 یک جواب برای مساله باشد، یعنی «همه محدودیت‌ها صدق کند و همچنین»
محدودیت‌های علامتی نیز صدق کند، «آن صورت $\bar{X}$ را یک جواب شدنی (جواب موجهه) برای مساله می‌گوییم».

جواب بهینه
جواب شدنی که بهترین مقدار تابع هدف به ازای آن حاصل می‌شود را جواب بهینه
می‌گویند. یعنی در مساله Max بزرگترین مقدار در مساله Min بزرگترین مقدار تابع
هدف، به ازای جواب بهینه حاصل می‌شود.

مقدار بهینه
مقدار تابع هدف، به ازای جواب بهینه را مقدار بهینه می‌گویند.

قرار داد: جواب بهینه را با X^* و مقدار بهینه را با Z^* نمایش می‌دهیم.

حل هدی ساله برنامه ریزی خطی دومین

در سیمین بخش عملیات به از فرموله کردن شده برنامه ریزی خطی حل آن می پردازیم اهمیت
و ارزش مدل های ریاضی در آن است که پس از حل آنها در نتایج آن مجسمه شدیم چون
برنامه ریزی خطی، تابع هدف محدودیت ها خطی هستند، می توان به روش ترسیمی برای حل
آنها استفاده کرد. روش های ترسیمی در مدل های برنامه ریزی خطی به مدل هایی محدود می شود که
حداکثر دارای دو یا سه متغیر تصمیم هستند. برای حل این نوع مدل ها می توان از یک دستگاه
استفاده کرد. استفاده از نحوه ترسیمی برای مدل هایی که سه متغیر هستند نیز با استفاده از دستگاه
به خوبی تا حدودی مشکل است ولی چنانچه توابع هدف و تقسیم بندی در آن باشد حل مدل
به روش ترسیمی به هیچ وجه امکان پذیر نخواهد بود.
در این روش، حل ساله طی ۲ مرحله انجام می گیرد. در مرحله اول نقطه ی موه متغیر
می شود در مرحله دوم، جواب بهینه را مشخص می کنیم.

خواص نقطه جواب:

① نقطه بهینه همواره در مرز ناحیه موه قرار دارد.

② جواب بهینه همواره نزدیک گوشه از مرز قرار دارد.

«گوشه شامل نقطه ای است که در تقاطع حداقل دو خط از خطوط موازی قرار می گیرد»

③ نقطه‌های بکینه، آویز نقطه‌ای است که خط تاج هدف در ناحیه موج بر آن می‌نشیند.

خاصیت‌های اساسی برای جواب‌های گوشه موج

خاصیت ۱: جواب بکینه ساله برپاده بری خطی، قطعاً یک جواب گوشه‌ای موج است.

خاصیت ۲: تعداد جواب‌های گوشه موج متناهی است.

هر جواب گوشه موج، جواب هم‌زمان یک دستگاه n معادله‌ای است که از بین $m+n$

معادله محدودیت انتخاب شده است.

m = تعداد متغیرهای تقسیم

n = تعداد محدودیت‌های کارکردی

حد اکثر تعداد جواب‌های گوشه موج

$$\frac{(m+n)!}{m!n!}$$

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 \leq 40$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$n=2$ تعداد متغیر تقسیم

$m=2$ تعداد محدودیت کارکردی

$$\frac{(2+2)!}{2!2!} = \frac{4!}{2!2!} = \underline{6}$$

مثال: مسئله برنامه ریزی خطی ذیل را به روش هندسی حل کنید.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ابتدا هدف و محدودیت‌ها را به صورت یک معادله خطی رسم می‌کنیم و با دو نقطه دلخواه (مثلاً

طول از مبدأ و عرض از مبدأ) خطوط مربوطه را در صفحه دکارتی رسم می‌کنیم و سپس با توجه به نامش بودن

منحصرها مجموعه جواب یک محدودیت‌ها را در ناحیه اول صفحه دکارتی مشخص می‌کنیم که در شکل آنگاه

نمای جواب را در صورت وجود تعیین می‌کنیم.

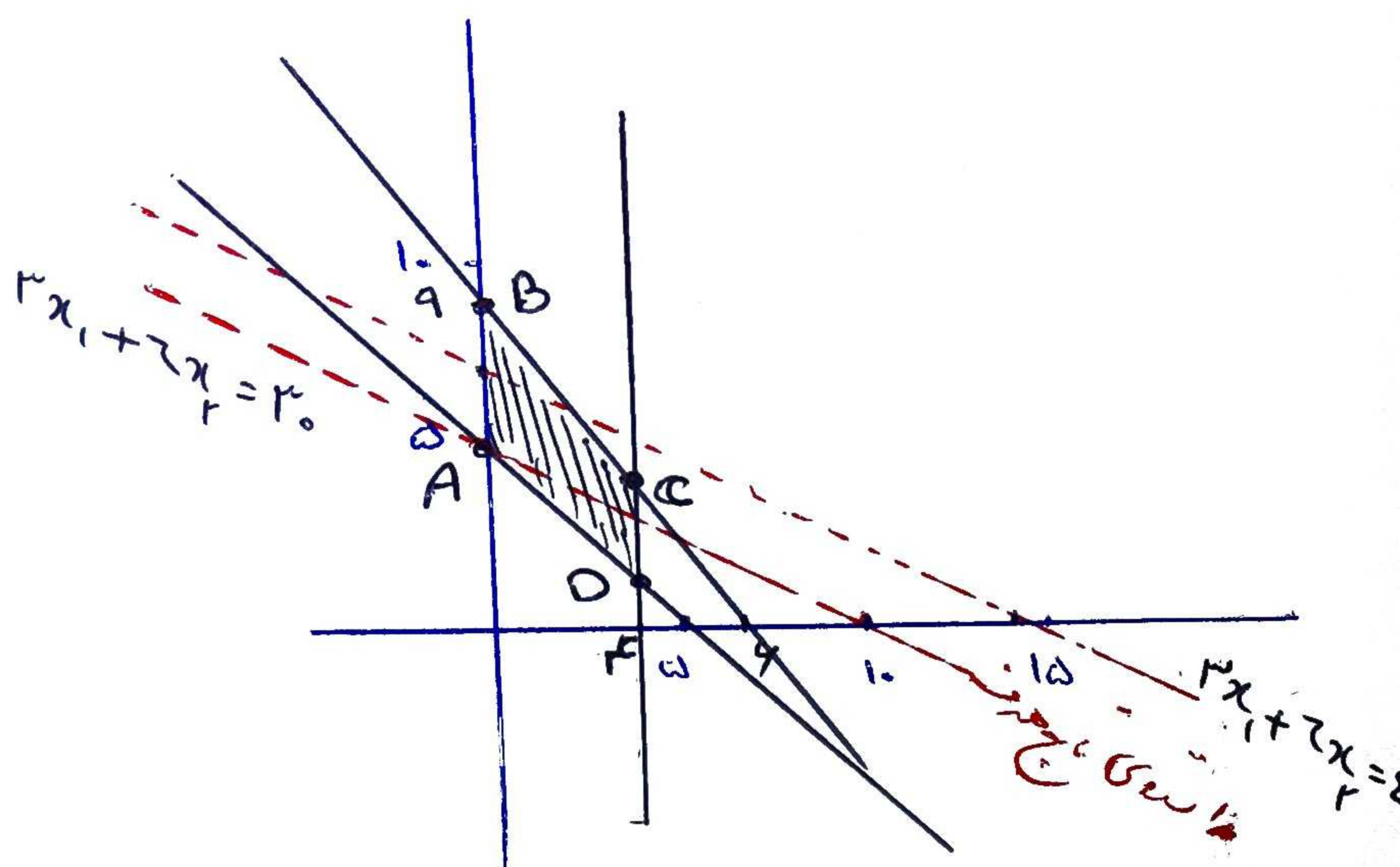
$$3x_1 + 2x_2 = 18$$

x_1	x_2
0	9
6	0

$$x_1 + x_2 = 5$$

x_1	x_2
0	5
5	0

$$x_1 = 4$$



حال با فرض یک مقدار دلخواه برای تابع هدف، آن را در صفحه دکارتی رسم می‌کنیم و سپس با

توجه به مسئله Min Max حرکت تابع هدف در راستای خودش نقطه محلی را پیدا می‌کنیم

موضوع: تعداد تاج حرف اعداد ۳۰، ۴۲ باشد، آن گاه

$$3x_1 + 4x_2 = 30 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

x_1	x_2
0	5
10	0

$$3x_1 + 2x_2 = 42 \rightarrow$$

x_1	x_2
0	7
14	0

حال، راستای تاج حرف را در فضای جواب به صورت خط چین رسم می‌کنیم. چون مسئله

از نوع Max می‌باشد با حرکت تاج حرف در جهت افزایش (به سمت بالا) آخرین نقطه‌ای

که تاج حرف از فضای جواب خارج می‌شود نقطه B است. بنابراین نقطه $B(9, 0)$ محسبه

$$\text{است} \quad \text{دفعه تاج حرف} \quad Z = 3 \times 0 + 2 \times 9 = 18$$

همچنین روش دیگری این است که در نقاط گوشه‌ای موارد تاج حرف را محاسبه نموده، به‌دراستی

Min, Max تاج حرف بیشترین یا کمترین موارد را بدست آوریم.

$$9 \mid 0 \rightarrow Z = 3(0) + 2(9) = 18 \Rightarrow Z^* = 18$$

$$0 \mid 5 \rightarrow Z = 3(0) + 2(5) = 10$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases} \rightarrow 2x_2 = 18 - 12 \rightarrow x_2 = 3 \quad \begin{matrix} 18 \\ 12 \end{matrix} \rightarrow Z = 3(4) + 2(3) = 12 + 12 = 24 \Rightarrow Z = 12 + 18 = 30$$

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \rightarrow 4 + x_2 = 5 \rightarrow x_2 = 1 \quad \begin{matrix} 18 \\ 11 \end{matrix}$$

$$Z = 3(4) + 2(1) = 12 + 2 = 14$$